

C

(Printed Pages 8)

Roll No. _____

18/305

बी.ए./बी.एस-सी. (भाग-I) परीक्षा, 2018

B.A./B.Sc. (Part-I) Examination, 2018

MATHEMATICS

प्रथम प्रश्न-पत्र

First Paper

(Algebra and Trigonometry)

समय : 3 घण्टे

पूर्णांक : 65

Time : Three Hours

Maximum Marks : 65

नोट : कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रथम प्रश्न अनिवार्य है। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न किया जाना है। प्रत्येक प्रश्न के अंक दाहिनी ओर अंकित हैं।

Note : Answer **five** questions in all. Question **No.1** is **compulsory**. Answer **one** question from each unit. Marks allotted to each question are indicated in the right-hand margin.

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए : $2\frac{1}{2} \times 10 = 25$

Answer the following questions :

(i) दिखाइये कि एक अनुक्रम की सीमा अद्वितीय होती है।
Show that limit of a sequence is unique.

P.T.O.

18/305

- (ii) श्रेणी $\sum \sin \frac{1}{n}$ अभिसारी है या अपसारी? तर्क दीजिए।
Whether the series $\sum \sin \frac{1}{n}$ is convergent or divergent? Give the reason.
- (iii) डी. अलम्बर्ट अनुपात जाँच का कथन दीजिये।
State the D' Alembert's Ratio Test.
- (iv) एक समूह के लिए व्युत्क्रम नियम को सिद्ध कीजिए।
Prove the Reversal Rule for a group.
- (v) चक्र (123) (35) का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।
Find the inverse of the cycle (123) (35).
- (vi) दिखाइये कि किसी समूह के दो कोसेट्स में तत्वों की संख्या एक समान होगी।
Show that any two cosets of a group have the same number of elements.
- (vii) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह समाकारी का कोर (कर्नेल) एक प्रसामान्य सहसमूह होता है।
Prove that Kernel of a group homomorphism is a normal subgroup.
- (viii) वलय की परिभाषा सोदाहरण दीजिए।
Give the definition of Ring with example.
- (ix) दिखाइये कि $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ का उपवलय तो है लेकिन आदर्श नहीं।
Show that $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ is a subring of $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ but not an Ideal.

(x) सिद्ध कीजिए कि

$$\log(1+i) = \frac{1}{2} \log 2 + i \left((2n\pi + \frac{\pi}{4}) \right)$$

Prove that

$$\log(1+i) = \frac{1}{2} \log 2 + i \left((2n\pi + \frac{\pi}{4}) \right)$$

इकाई-प्रथम/ Unit-I

2. (a) किसी श्रेणी के लिए कोशी मूल टेस्ट (जाँच) का कथन करते हुए सिद्ध कीजिए। 5

State and Prove the Cauchy Root Test for a Series.

(b) सिद्ध कीजिए कि ज्यामिति श्रेणी

$$\sum r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + \infty$$

अभिसारी होगा यदि $|r| < 1$ तथा अपसारी होगा यदि $|r| \geq 1$ । 5

Prove that the Geometric series $\sum r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + \infty$ is convergent if $|r| < 1$ and divergent if $|r| \geq 1$.

अथवा / OR

3. (a) (i) एक एकान्तर श्रेणी के लिए लाइब्निट्ज जाँच का कथन कीजिए। 2½

State the Leibnitz Test for an Alternating series.

(ii) माना R, Z में एक ऐसा सम्बंध है कि $a \sim b$ यदि $5/a-b$ तो दिखाइये कि R एक तुल्यता सम्बंध है।

Let R be a Relation in Z (set of Integers) such that $a \sim b$ if $5/a-b$, then show that R is an equivalence Relation. 2½

(b) α और β के विभिन्न मानों के लिए श्रेणी

$$1 + \frac{\alpha+1}{\beta+1} + \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{(\beta+1)(2\beta+1)} + \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)(3\alpha+1)}{(\beta+1)(2\beta+1)(3\beta+1)} + \dots$$

की प्रकृति (अभिसारी या अपसारी होने) की चर्चा कीजिए। http://www.mgkvponline.com 5

Discuss the nature (Convergent or divergent) of the series

$$1 + \frac{\alpha+1}{\beta+1} + \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{(\beta+1)(2\beta+1)} + \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)(3\alpha+1)}{(\beta+1)(2\beta+1)(3\beta+1)} + \dots$$

for the different values of α and β

इकाई-द्वितीय/ Unit-II

4. (a) दिखाइये कि $(Q, *)$ एक अनंत अबेलियन समूह है जहाँ '*' निम्न प्रकार से परिभाषित है $a*b = a+b-ab$, तथा Q संख्या 1 से रहित परिमेय संख्याओं का

सम्मूचय है। 5
Show that $(Q, *)$ is an infinite abelian group. Where $*$ is defined as $a*b = a + b - ab$ and Q is the set of rational numbers without 1.

- (b) एक समूह के किसी दो तत्वों a तथा b के लिए दिखाइये कि G अबेलियन होगा यदि और केवल यदि $(a b)^2 = a^2 b^2$

तथा, एक उदाहरण से दिखाइये कि S_3 , एक नान-अबेलियन है। 5

For any two elements a and b of a group G , show that G is abelian iff $(a b)^2 = a^2 b^2$ and also show by an example that S_3 is non abelian.

अथवा / OR

- 5/ (a) सिद्ध कीजिए किसी चक्रीय समूह की कोटि, उसके किसी जेनेरेटर तत्व के कोटि के बराबर होता है। एक उदाहरण भी दीजिए। 5

Prove that the order of a cyclic group is

equal to the order of its any generator element. Also give an example.

- (b) दिखाइये कि किसी सीमित समूह G के प्रत्येक तत्व की कोटि उस समूह के कोटि को विभाजित करता है। Show that the order of every element of a finite group G is a divisor of the order of the group. 5

इकाई-तृतीय / Unit-III

- 6/ (a) कैली प्रमेय का कथन देते हुए सिद्ध कीजिये। 5
State and prove Cayley's Theorem.

- (b) दिखाइये कि पूर्णांक प्रांत का विशेषांक (कैरेक्टरिस्टिक) या तो शून्य होगा या एक रूढ़ संख्या। 5
Show that characteristic of an Integral Domain is either zero or a prime number.

अथवा / OR

- 6/ (a) दिखाइये कि A_3, S_3 का एक प्रसामान्य उपसमूह है। Show that A_3 is a normal Subgroup of S_3 . 5

- (b) यदि R कोई क्रम विनिमेयी वलय हो, तथा $a \in R$, तो दिखाइये कि सम्मूचय $Ra = \{ra | r \in R\}$, R का एक

आदर्श होगा। 5

If R be a commutative ring and $a \in R$, then show that the set $Ra = \{ra | r \in R\}$ is an Ideal of R .

इकाई-चतुर्थ / Unit-IV

8. (a) सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \dots$$

Prove that

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \dots$$

(b) यदि $\sin(\theta + i\phi) = \tan \alpha + i \sec \alpha$ तो सिद्ध कीजिए कि $\cos 2\theta \cosh 2\phi = 3$ 5

If $\sin(\theta + i\phi) = \tan \alpha + i \sec \alpha$, then prove that $\cos 2\theta \cosh 2\phi = 3$

अथवा / OR

9. (a) दिखाइये कि : 5

$$\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + i \frac{\alpha}{2} \right) = i \tan^{-1} (\sinh \alpha)$$

Show that

$$\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + i \frac{\alpha}{2} \right) = i \tan^{-1} (\sinh \alpha)$$

(b) श्रेणी : 5

$$\tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{7} + \tan^{-1} \frac{1}{13} + \tan^{-1} \frac{1}{21} + \dots + n$$

पद का योग ज्ञात कीजिए।

Sum the series

$$\tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{7} + \tan^{-1} \frac{1}{13} + \tan^{-1} \frac{1}{21} + \dots + n$$

terms