C (Printed Pages 11)

Roll No. ________

# 18/306

## बी.ए./बी.एस-सी. (भाग-I) परीक्षा, 2018

## B.A./B.Sc. (Part-I) Examination, 2018

### MATHEMATICS

द्वितीय प्रश्न-पत्र

**Second Paper**

**(Calculus)**

समय : 3 घण्टे पूर्णांक : 65

*Time : Three Hours* *Maximum Marks : 65*

नोट : कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। 25 अंकों का लघुउत्तरीय **प्रथम प्रश्न अनिवार्य** है। प्रत्येक इकाई से 10 अंकों का **एक-एक** प्रश्न किया जाना है।

**Note**: Answer **five** questions in **all**. Short answer type Question **No.1** carrying 25 marks is **compulsory**. Answer **one** question carry-









http://www.mgkvponline.com



ing 10 marks from each unit.

नोट : लघु-उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर की अधिकतम सीमा 200 शब्द तथा दीर्घ-उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर की अधिकतम सीमा 500 शब्द है।

**Note** : The answers to short questions should not exceed 200 words and the answers to long questions should not exceed 500 words.

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए: $2.5\times10=25$

Answer the following questions:

(a) यदि $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$, $x\neq0$ तथा $f(0)=0$ है तो दिखाइये कि फलन $x=0$ पर सतत् है, परन्तु $f'(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

If $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ for $x\neq0$ and $f(0)=0$, show that $f(x)$ is continuous at $x=0$, but $f'(x)$ does not exist.

(b) टेलर प्रमेय का प्रयोग कर दिखाइये कि

$$f(mx) = f(x) + (m-1)xf'(x) + \frac{1}{2}(m-1)^2 x^2 f''(x) + \frac{1}{6}(m-1)^3 x^3 f'''(x) + \cdots$$

Use Taylor's theorem to show that:

$$f(mx) = f(x) + (m-1)xf'(x) + \frac{1}{2}(m-1)^2 x^2 f''(x) + \frac{1}{6}(m-1)^3 x^3 f'''(x) + \cdots$$

(c) सिद्ध कीजिये कि वक्र $x^2y^2=a^2(x^2+y^2)$ के अनन्तस्पर्शी एक वर्ग बनाते हैं।

Show that the asymptotes of the curve $x^2y^2=a^2(x^2+y^2)$ form a square.

(d) परवलय $y^2=4ax$ का इवोलूट प्राप्त कीजिए:

Find the evolute of the parabola $y^2=4ax$.

(e) फलन

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$
$$= 0, \quad (x,y) = (0,0)$$









की सततता मूल विन्दु पर जांच कीजिए।

Examine the continuity at the origin of the function

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$
$$= 0, \quad (x,y) = (0,0)$$

(f) यदि, $u = \log \frac{x^2+y^2}{x+y}$, सिद्ध कीजिए कि

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

If, $u = \log \frac{x^2+y^2}{x+y}$, prove that

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

(g) यदि $z=uv$, तथा $u^2+v^2-x-y=0$, $u^2-v^2+3x+y=0$ हो तब $\frac{\partial z}{\partial x}$ प्राप्त कीजिए।

If $z=uv$, and $u^2+v^2-x-y=0$, $u^2-v^2+3x+y=0$, find $\frac{\partial z}{\partial x}$

(h) सिद्ध कीजिये कि

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} dx = \frac{1}{a^n}\overline{|(n)}$$

Prove that $\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} dx = \frac{1}{a^n}\overline{|(n)}$

(i) मान ज्ञात कीजिए: $\iint_R xy\,dx\,dy$

Find value :

जहाँ R वृत्त $x^2+y^2=a^2$ का चतुष्क है जिसके लिये $x>0,\ y>0$ 

Where R circle is quadruple of $x^2+y^2=a^2$ for that $x>0,\ y>0$.

(j) पाप्पस प्रमेय का उल्लेख कीजिए :

State Pappus Theorem.

**इकाई-प्रथम / Unit-I**

2. (a) यदि $y=(x^2-1)^n$, दिखाइये कि 5+5

$(x^2-1)y_{n+2}+2xy_{n+1}-n(n+1)y_n=0$

If $y=(x^2-1)^n$, show that

$(x^2-1)y_{n+2}+2xy_{n+1}-n(n+1)y_n=0$

(b) मैक्लारिन प्रमेय का उपयोग करके फलन $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$ का प्रसार x के आरोही क्रम















में $x^4$ तक करें:

Use Maclaurin theorem to expand $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$ in ascending powers of x as for as $x^4$.

**अथवा / OR**

3. (a) टेलर प्रमेय से log x का प्रसार (x−1) के घात में करें तथा log1.1 का मान ज्ञात कीजिए। 5+5

Expand log x in powers of (x−1) by Taylor's theorem and hence find the value of log1.1 .

(b) वक्र $y(a^2+x^2)=x^3$ के लिये दिखाइये कि मूल विन्दु एक इनफ्लेक्शन विन्दु है, तथा दो अन्य विन्दुओं के पर जिसके लिये $x=\pm a\sqrt{3}$

For the curve $y(a^2+x^2)=x^3$, show that there is a point of inflexion at the origin, and also at the points for which $x=\pm a\sqrt{3}$

## इकाई-द्वितीय / Unit-II

4. (a) सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की वक्रता त्रिज्या $\rho=\frac{a^2b^2}{p^3}$ जहाँ p केन्द्र से विन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की से लम्बवत दूरी है। 5+5

Prove that for the ellipse, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, the radius of curvature $\rho=\frac{a^2b^2}{p^3}$ p being the perpendicular from the centre upon the tangent at (x, y).

(b) वक्र $x^3+2x^2y-xy^2-2y^3+xy-y^2-1=0$ के सभी अनन्तस्पर्शी ज्ञात कीजिए।

Find all the asymptotes of the curve $x^3+2x^2y-xy^2-2y^3+xy-y^2-1=0$

**अथवा / OR**

5. (a) यदि एक वक्र समीकरणों x=f(t) तथा y=g(t) से परिभाषित है तब सिद्ध कीजिए कि वक्रता $\frac{1}{\rho}$ बराबर











है $\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$ जहाँ डैस, t के सापेक्ष अवकलन प्रदर्शित करता है। 5+5

If a curve is defined by the equations x=f(t) and y=g(t), prove that the curvature $\frac{1}{\rho}$ is equal to $\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$ where accents denote differentiation with respect to t.

(b) वक्र $(x-2)^2=y(y-1)^2$ पर द्विबिन्दु का अस्तित्व तथा प्रकृति ज्ञात कीजिए।

Determine the existence and nature of the double points on the curve.

$(x-2)^2=y(y-1)^2$

## इकाई-तृतीय / Unit-III

6. (a) यदि $v=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$, सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$$ 5+5

If $v=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$, prove that

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$$

(b) यदि, $u=\tan^{-1}\frac{x^3+y^3}{x-y}$ सिद्ध कीजिए कि

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\cos 3u\ \sin u$$

If $u=\tan^{-1}\frac{x^3+y^3}{x-y}$, prove that

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\cos 3u\ \sin u$$

**अथवा / OR**

7. (a) यदि $u=x+3y^2-z^3$, $v=4x^2yz$, $w=2z^2-xy$ तब बिन्दु (1, -1, 0) पर 5+5

$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $u=x+3y^2-z^3$, $v=4x^2yz$, $w=2z^2-xy$, evaluate $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ at (1, −1, 0)









(b) 24 को तीन भागों में ऐसे विभक्त कीजिये कि प्रथम, द्वितीय का वर्ग तथा तृतीय भागों का गुणनफल अधिकतम हो।

Divide 24 into three parts such that the continued product of the first, square of the second and cube of the third may be maximum.

## इकाई-चतुर्थ / Unit-IV

8. (a) सीधी रेखा $y=4x-1$ द्वारा परवलय $y^2=2x$ द्वारा कटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये। 5+5

Find the area of the segment cut off from the parabola $y^2=2x$ by the straight line $y=4x-1$.

(b) वक्र $y^2(a+x)=x^2(a-x)$ के लूप को x-अक्ष के सापेक्ष परिक्रमण से बने ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

Find the volume formed by the revolution of the loop of the curve $y^2(a+x)=x^2(a-x)$ about the axis of x.

**अथवा / OR**

9. (a) द्विसमाकलन $\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} xy\,dx\,dy$ में समाकलन का क्रम बदलिये तथा इसका मूल्यांकन कीजिए। 5+5

Change the order of integration in

$\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} xy\,dx\,dy$

and hence evaluate the same.

(b) यदि $I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n\,dx$ जहाँ n एक धन पूर्णांक हो तो दिखाइये कि

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} a^2 I_{n-1}$$

If $I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n\,dx$, where n is a positive integer, show that $I_n = \frac{2n}{2n+1} a^2 I_{n-1}$